



# Analyse des effets de variation de volume des gaz dans les équations générales de bilan

## Analysis of the volume variation effects for gases in general budget equations

Claude Rey

*l'Université d'Aix-Marseille III, Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors d'Equilibre, IRPHE, UMR 6594 du CNRS, Technopôle de Château Gombert, F-13451 Marseille Cedex 20, France*

Reçu le 9 juin 1999; reçu en forme révisée le 25 janvier 2000

### Résumé

Chaque bilan, de masse, de forces et d'énergie, est écrit par unité de masse du fluide. La continuité introduit un nouveau paramètre  $\Theta = \ln \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{U}_r}$  appelé ici paramètre de variation volumique,  $\mathcal{U}$  est le volume massique,  $\mathcal{U}_r$  une valeur de référence constante. Si  $|\Theta| < \ln 2$ , ce paramètre conduit à un découpage des équations de bilan en deux équations distinctes. La première équation est invariable en écriture par rapport à une situation incompressible; en particulier l'ordre de corrélation des termes des équations reste inchangé. La deuxième équation est directement liée à la variation de volume. Si la loi d'état des gaz parfaits est appliquée, la pression n'est plus une variable du système. Une classification des écoulements donne les différents cas qui autorisent l'utilisation de ce découpage. © 2000 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

### Abstract

Each budget, of mass, forces and energy, is written per unit of mass of the fluid. Then, continuity introduces a new parameter  $\Theta = \ln \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{U}_r}$ , called the parameter of volume variation,  $\mathcal{U}$  is the mass volume,  $\mathcal{U}_r$  a constant value of reference. When  $|\Theta| < \ln 2$ , this parameter, taken as a new variable, led to a budget separated into two distinct equations. The first equation is invariable in writing compared to an incompressible situation; in particular the order of correlation in these equations remains unchanged. The second equation is directly related to the volume variation. If the law of state of perfect gas is applied, the pressure is not any more a variable for the system. A flows classification gives the different cases, which permits the use of this separation. © 2000 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

### 1. Introduction

Les écoulements naturels ou industriels présentent

généralement un grand nombre de complexités tant sur le plan de l'environnement ou confinement que sur celui du comportement physique même des gaz

Nomenclature			
$\mathcal{A}$	action volumique extérieure	$\mathcal{U}_r$	volume spécifique de référence, constant
$c_v$	chaleur massique à volume constant	$\alpha$	diffusivité thermique, $\alpha = k/\rho c_P$
$c_P$	chaleur massique à pression constante	$\gamma = c_P/c_v$	
$\mathcal{D}$	diffusivité d'un des constituants du mélange	$\Delta, \Delta\rho = \rho - \rho_r,$ $\Delta\mathcal{U} = \mathcal{U} - \mathcal{U}_r$	
$D$	diffusivité d'un des constituants du mélange, pondérée, $D = \mathcal{D}/\rho$	$\varepsilon = -(1 - \Theta - \mathcal{U}_r/\mathcal{U})$	
$\bar{D}$	tenseur des taux de déformations	$\Theta$	paramètre de variation volumique, $\Theta = \ln(\mathcal{U}/\mathcal{U}_r)$
$\bar{J}$	action surfacique extérieure généralisée	$\Theta^{(n)}$	valeur de $\Theta$ définie par un développement en série à l'ordre $n$ , $n$ entier fini
$\bar{J}$	action surfacique extérieure généralisée, $\bar{J}$ pondérée $\bar{J} = \bar{J}/\rho = \mathcal{U} \cdot \bar{J}$	$\mu = \rho\nu$	viscosité dynamique
$k$	conductibilité thermique	$\nu$	viscosité cinématique
$M_a$	nombre de Mach	$\rho$	masse volumique
$\mathcal{Q}$	flux de chaleur surfacique, $Q = \mathcal{Q}/\rho = \mathcal{U}\mathcal{Q}$	$\rho_r$	masse volumique de référence, constante
$P$	pression	$\bar{\Sigma}$	tenseur des contraintes
$\mathcal{R}_a$	rayonnement massique	$\bar{\Sigma}$	tenseur des contraintes 'cinématiques', $\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}/\rho = \mathcal{U}\bar{\Sigma}$
$r$	constante des gaz parfaits relative à sa masse molaire	$\bar{\tau}$	tenseur des contraintes cinématiques de viscosité
$T$	température	$\Psi$	grandeur physique généralisée dont on écrit le bilan massique
$t$	variable temps	$( )_0$	référence à un état adiabatique au repos, conditions d'arrêt (réservoir, paroi)
$\vec{U}$	vecteur vitesse		
$\mathcal{U}$	volume spécifique, $\mathcal{U} = 1/\rho$		

(écoulements atmosphériques, traitements des gaz industriels, climatisation, combustion, avionique...). La variation de la densité, due à la dynamique, à la thermique ou aux propriétés de mélange des constituants est au cœur de la complexité physique.

Ainsi la maîtrise de la physique des écoulements, compte tenu des milieux environnants, reste un enjeu capital pour la qualité et la sécurité des processus industriels (ou naturels) et pour la gestion de la consommation d'énergie de ces mêmes processus. L'approche proposée ici est développée dans un objectif d'applicabilité avec une meilleure appréhension des phénomènes physiques dominants.

En écoulements subsoniques à faible vitesse les fluides gazeux sont le plus souvent supposés incompressibles. Quand le volume spécifique varie par effet thermique ou par effet de mélanges de gaz, il est d'usage de conserver l'hypothèse d'incompressibilité par la condition de nullité de la divergence de la vitesse, les variations de volume spécifique sont alors prises en compte moyennant certaines hypothèses simplificatrices supplémentaires dont les plus

connues sont les hypothèses de Boussinesq [1,2]. Ces approximations sont justifiées pour diverses applications [3–6] et sont généralisées en utilisant des décompositions approchant les variations de masse volumique [7,8]. Une équation de Poisson sur la pression, qui n'est justifiée que si la divergence de la vitesse est effectivement négligeable par rapport aux termes conservés, est ainsi couramment utilisée pour déduire les effets des termes de pression.

Or les expériences et les modélisations numériques montrent que les écoulements de grandes dimensions en convection libre ou en convection mixte sont tels qu'il n'est pas justifiable a priori de négliger la divergence de la vitesse [9–11]. De même, la prise en compte d'effets de variation volumique 'non Boussinesq' montre que les structures turbulentes des champs cinématiques et thermiques peuvent différer notablement [12,13].

L'augmentation du degré des corrélations due à la variation de masse volumique, pour les écoulements turbulents a conduit divers auteurs à proposer une réduction du degré des corrélations par une

pondération [14–16]. On citera en particulier les travaux de A. Favre qui propose une statistique pondérée par la masse volumique, systématique pour toutes les grandeurs physiques des bilans [16–20]. Cette proposition permet de corriger les difficultés d'une observation «volumique» lorsque le volume est variable mais elle rend plus complexe les grandeurs cinématiques, la grandeur transportée n'est pas différenciée de son déplacement. La moyenne de Favre a été exploitée sur le plan expérimental et sur le plan de la simulation numérique; on citera en particulier E. Ruffin et al. [21] et M. Germano [22]. Une alternative à cette écriture a été apportée par P. Chassaing [23,24] (voir aussi H. Ha Minh et al. [25]) qui présente les corrélations avec les fluctuations de masse volumique de façon explicite et donne des relations exactes pour les déduire des corrélations d'ordre 2 associées [26]. Récemment l'introduction de la notion d'inhomogénéité massique pour un écoulement cinématiquement homogène a conduit P. Chassaing et al. [27,28] à développer par simulation numérique directe une étude approfondie du rôle de la variation de la masse volumique sur les mécanismes usuellement décrits en turbulence homogène compressible.

Une démarche nouvelle est proposée ici. Tous les termes des équations générales de bilan sont pris en compte, mais il est recherché un découpage entre les éléments du bilan, par une écriture permettant d'isoler le terme de la divergence de la vitesse pour lequel aucune hypothèse n'est avancée. Il n'est proposé aucune approximation a priori sur les termes des équations de sorte que l'analyse est conduite ici sans autre restriction que l'appartenance au domaine de validité des bilans formulés. Enfin, la logique des raisonnements conduit à ne pas limiter l'étude aux seuls écoulements subsoniques.

## 2. Analyse

Le bilan intégral est effectué pour un domaine constant de matière, et non pour un volume qui par définition est variable. En effet, quand le volume est variable il n'est plus possible de faire référence à un volume élémentaire d'échelle macroscopique. La particule fluide est donc repérée par sa masse  $dm$ , constante et dont la sommation sur le domaine d'observation donne la masse  $m$  considérée. Une écriture généralisée de bilan est utilisée pour une masse  $m$  de fluide. Le bilan s'exprime en écrivant que le taux de variation de la somme sur la masse  $m$  des grandeurs physiques  $\Psi$  attachées à un élément de matière  $dm (= \rho dv)$  est égale à la somme des actions massiques extérieures  $\mathcal{A}$  pour chacun des éléments de matière  $dm$ , ajoutée de la somme des actions surfaciques  $\vec{\mathcal{J}}$  des éléments de sur-

face constituant l'enveloppe de la masse  $m$  totale du fluide considéré. Cette écriture est générique,  $\Psi$  peut être un scalaire (alors  $\mathcal{A}$  est un scalaire et  $\vec{\mathcal{J}}$  est un vecteur) pour le bilan de masse et le bilan d'énergie,  $\Psi$  peut être un vecteur (alors  $\mathcal{A}$  est un vecteur et  $\vec{\mathcal{J}}$  est un tenseur) pour le bilan des forces,  $\Psi$  peut être un tenseur (alors  $\mathcal{A}$  est un tenseur et  $\vec{\mathcal{J}}$  est un tenseur d'ordre  $n + 1$ , si  $\Psi$  et  $\mathcal{A}$  sont d'ordre  $n$ ) pour le bilan des tensions.

$$\frac{d}{dt} \int_m \Psi dm = \int_m \mathcal{A} dm + \int_S \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n} ds$$

Ce bilan intégral est réduit à un bilan pour un élément quelconque de fluide de masse  $dm$ , suivant:

$$\frac{d}{dt} \Psi - \mathcal{A} - \mathcal{U} \operatorname{div} \vec{\mathcal{J}} = 0 \quad (1)$$

où  $\mathcal{U}$  est le volume spécifique ( $\mathcal{U} = 1/\rho$ ),  $\operatorname{div} \vec{\mathcal{J}}$  est un scalaire, un vecteur ou un tenseur suivant la nature de  $\vec{\mathcal{J}}$ , les notations ne sont pas différenciées dans la formulation générique, on conserve celles usitées pour  $\Psi$  scalaire; il en sera de même pour la notation  $grad$ . Les grandeurs physiques attachées à l'élément de masse  $dm$  sont appelées grandeurs spécifiques (ou massiques).

Le volume spécifique est la grandeur qui s'associe naturellement à l'élément de masse  $dm$  pour lui conférer une distribution volumique, l'équation (1) met alors en évidence un équilibre du degré des corrélations des termes (ordre  $n$  et  $n + 1$ ) par rapport à ce que produisait l'écriture par élément de volume (à propriété physique constante, ordre  $n$ ,  $n + 1$ ,  $n + 2$ ). Les mécanismes massiques sont observés de façon inchangée, que le volume soit ou non variable, la différence entre ces deux situations est focalisée sur les flux surfaciques.

De même que A. Favre fondait la pondération par la masse sur l'équation de continuité, dont il réduisait l'ordre statistique, il sera introduit ici une nouvelle variable pour réduire l'ordre des corrélations. Pour cela l'écriture par unité de masse de l'équation de continuité donne

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U} - \operatorname{div} \vec{U} = 0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{\mathcal{U}} \frac{d}{dt} \mathcal{U} = \frac{d}{dt} \ln \left( \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{U}_r} \right) = \frac{d}{dt} \Theta = \operatorname{div} \vec{U} \quad (2)$$

et introduit [28] le paramètre de variation volumique  $\Theta$  défini par  $\Theta = \ln \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{U}_r}$ . Il en résulte l'utilisation d'un volume spécifique de référence  $\mathcal{U}_r(P_r, T_r)$  constant, fini et non nul, qui peut être défini par une situation initiale ou limite du domaine fluide considéré. On remarque que l'équation (2) peut être formulée suivant:

$$(1 + \Theta) \operatorname{div} \vec{U} = \frac{\partial}{\partial t} \Theta + \operatorname{div}(\Theta \vec{U}). \quad (2')$$

Les flux surfaciques et les termes de variation de volume du bilan général (1) sont explicités par l'écriture suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi + \operatorname{div}(\Psi \vec{U} - \vec{J}) - \mathcal{A} - \Psi \cdot \operatorname{div} \vec{U} + \vec{J} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \Theta = 0 \quad (3)$$

où sont introduits les actions surfaciques spécifiques  $\vec{J} = \mathcal{U} \vec{J}$  et le paramètre de variation volumique  $\Theta = \ln \frac{\rho}{\rho_r}$ .

La divergence de la vitesse peut être substituée au moyen de l'équation (2') dans l'équation (3) ce qui conduit à :

$$(1 + \Theta) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \operatorname{div}(\Psi \vec{U} - \vec{J}) - \mathcal{A} \right\} - \Psi \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Theta + \operatorname{div}(\Theta \vec{U}) \right\} + (1 + \Theta) \vec{J} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \Theta = 0$$

ou :

$$(1 + \Theta) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \operatorname{div}(\Psi \vec{U} - \vec{J}) - \mathcal{A} \right\} - \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\Psi \Theta) + \operatorname{div}(\Psi \Theta \vec{U} - \vec{J} \Theta) - \mathcal{A} \Theta \right\} + \Theta \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \operatorname{div}(\Psi \vec{U} - \vec{J}) - \mathcal{A} \right\} - \Theta \Psi \operatorname{div} \vec{U} + \Theta \vec{J} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \Theta = 0$$

et :

$$(1 + 2\Theta) \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\Psi \vec{U} - \vec{J}) - \mathcal{A} \right\} - \left\{ \frac{\partial (\Psi \Theta)}{\partial t} + \operatorname{div}((\Psi \vec{U} - \vec{J}) \Theta) - \mathcal{A} \Theta \right\} - \Theta \Psi \operatorname{div} \vec{U} + \Theta \vec{J} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \Theta = 0$$

Utilisant à nouveau l'équation (2'), le bilan sera présenté sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi(1 - \Theta)) + \operatorname{div}((\Psi \vec{U} - \vec{J})(1 - \Theta)) - \mathcal{A}(1 - \Theta) = -\Theta (\Psi \operatorname{div} \vec{U} - \vec{J} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \Theta) \quad (4)$$

Dans le premier membre de l'équation (4), apparaissent les changements directs des grandeurs physiques sous l'effet de la variation de volume, dans le second membre apparaissent les mécanismes de la dilatation.

Cette séparation permet de chercher un seuil à partir duquel les mécanismes de la dilatation deviennent tout à fait notables.

L'analyse qui suit est menée pour le cas particulier des écoulements à faible taux de variation de volume ( $|\Theta| < \ln 2$ ), plus précisément on formule l'hypothèse suivante :

**Hypothèse.** On suppose que  $|\Theta| < \ln 2$  est tel qu'il existe une valeur de  $n$  entier fini pour laquelle un développement limité à l'ordre  $n$  en  $\frac{\Delta \rho}{\rho_r} = \frac{\rho - \rho_r}{\rho_r} = -\frac{\mathcal{U} - \mathcal{U}_r}{\mathcal{U}}$ , permet une représentation quasi exacte de  $\Theta$  pour les opérateurs de dérivés premières temporelles et spatiales de  $\Theta$ .

Cette hypothèse se transcrit dans les équation suivant :

$$\operatorname{div} \vec{U} = \frac{d}{dt} \Theta^{(n)}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi + \operatorname{div}(\Psi \vec{U} - \vec{J}) - \mathcal{A} = \Psi \cdot \operatorname{div} \vec{U} - \vec{J} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \Theta^{(n)}$$

avec

$$\Theta^{(n)} = -\ln \frac{\rho}{\rho_r} = -\ln \left( 1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_r} \right) = -\frac{\Delta \rho}{\rho_r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta \rho}{\rho_r} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta \rho}{\rho_r} \right)^3 \dots + \frac{(-1)^n}{n} \left( \frac{\Delta \rho}{\rho_r} \right)^n$$

Suivant cette hypothèse, il n'existe pas de terme du développement au-delà de l'ordre  $n$  (en toute rigueur, l'égalité impose  $n \rightarrow \infty$ ). En d'autres termes cela signifie que le seuil recherché à partir duquel les mécanismes de la dilatation deviennent tout à fait notables correspondrait à la valeur limite de  $\Theta$  autorisant un développement en série. Cette proposition va être étayée par le raisonnement suivant :

Le développement en puissances de  $\rho/\rho_r$  s'écrit :

$$1 + \ln \frac{\rho}{\rho_r} \cong 1 - \Theta^{(n)} = - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{2n}}{n} \right) + n \frac{\rho}{\rho_r} - \left( \frac{1}{2} + 1 + \frac{6}{4} + \dots + \frac{n-1}{2!} \right) \frac{\rho^2}{\rho_r^2} + \left( \frac{1}{3} + 1 + \dots + \frac{(n-1)(n-2)}{3!} \right) \frac{\rho^3}{\rho_r^3} - \left( \frac{1}{4} + \dots + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \right) \frac{\rho^4}{\rho_r^4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \rho^n}{n \rho_r^n}$$

Compte tenu des identités suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n(n-1)}{2} \equiv 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \\ \equiv 2 \times 1 + 3 \times 2 + \dots + (n-1)(n-2) \\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} \\ \equiv 3 \times 2 \times 1 + \dots + (n-1)(n-2)(n-3) \\ \dots \end{array} \right.$$

la relation précédente est écrite sous la forme:

$$1 - \Theta^{(n)} = - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{2n}}{n} \right) + n \frac{\rho}{\rho_r} - \frac{1}{2} \left( \frac{n(n-1)}{2!} \right) \frac{\rho^2}{\rho_r^2} + \frac{1}{3} \left( \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \right) \frac{\rho^3}{\rho_r^3} - \frac{1}{4} \left( \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \right) \frac{\rho^4}{\rho_r^4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \rho^n}{n \rho_r^n}.$$

Le bilan classique utilisant la masse volumique (équation (1) multipliée par  $\rho$ )

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Psi) + \text{div}(\rho\Psi\vec{U} - \rho\vec{J}) - \rho\mathcal{A} = 0 \tag{1'}$$

est utilisée dans le calcul qui donne en application à l'équation (4):

$$\left\{ - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{2n}}{n} \right) + \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{2n}}{n} \right) - n \frac{\rho}{\rho_r} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{\rho^2}{\rho_r^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{\rho^3}{\rho_r^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \frac{\rho^4}{\rho_r^4} + \dots + (-1)^n \frac{\rho^n}{\rho_r^n} \right\} \times (\Psi \text{ div } \vec{U} - \vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta^{(n)}) = 0$$

soit, quel que soit n fini vérifiant l'hypothèse:

$$\left( - \frac{\Delta\rho}{\rho_r} \right)^n (\Psi \text{ div } \vec{U} - \vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta^{(n)}) = 0. \tag{5}$$

Puisque  $\Delta\rho/\rho_r$  n'est pas identiquement nul l'ensemble de ces considérations permet de déduire que si

l'hypothèse est vérifiée  $\Psi \text{ div } \vec{U} - \vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta^{(n)} = \Psi \text{ div } \vec{U} - \vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta$  ne contribue pas au bilan (3). L'hypothèse est postulée être vérifiée lorsque  $\Theta$  est petit devant l'unité (considération qui sera quantifiée plus loin), alors l'équation (3) peut être séparée en deux équations distinctes, sans effectuer d'hypothèses simplificatrices sur les termes de l'équation pris séparément. On écrira donc:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi) + \text{div}(\Psi\vec{U} - \vec{J}) - \mathcal{A} = 0 \tag{6a}$$

et:

$$\Psi \text{ div } \vec{U} - \vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta^{(n)} = 0 \tag{6b}$$

L'équation (6b) signifie que l'ensemble des termes de cette équation peut être négligé pour l'équation complète (3), sans pour autant que l'un ou l'autre des termes de l'équation (6b) pris séparément soit négligeable;  $\Psi \text{ div } \vec{U}$  et  $\vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta$  ont le même poids et s'opposent. L'équation (6b) apparaît comme une information supplémentaire précieuse pour relier la divergence de la vitesse au terme  $\vec{J}$  correspondant à une loi de comportement du fluide.

La seule hypothèse énoncée concerne l'existence d'une valeur finie de n telle que  $\Theta$  est représenté de façon quasi exacte par  $\Theta^{(n)}$ , ce qui conduit à la possibilité de séparer les termes de l'équation en deux équations distinctes. Aucun terme de l'une ou l'autre des équations n'est négligé, la soustraction membre à membre des équations (6a) et (6b) restitue l'équation exacte.

### 3. Critères d'application, modele

La restriction aux écoulement à faible taux de variation de volume conduit à la possibilité de séparation des termes de l'équation en deux équations distinctes. Il faut donc préciser les critères quantitatifs, sur la variation relative de masse volumique due à une dilatation thermique ou à une compression dynamique, qui autorisent une telle séparation.

#### 3.1. Remarque préliminaire sur le signe de la variation de volume

Le développement en série limitée doit satisfaire simultanément

$$\begin{aligned} \Theta^{(n)} &= -\ln \frac{\rho}{\rho_r} = -\ln \left( 1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_r} \right) \\ &= -\frac{\Delta\rho}{\rho_r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\rho}{\rho_r} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta\rho}{\rho_r} \right)^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{n} \left( \frac{\Delta\rho}{\rho_r} \right)^n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Theta^{(n)} &= \ln \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{U}_r} = \ln \left( 1 + \frac{\Delta \mathcal{U}}{\mathcal{U}_r} \right) \\ &= \frac{\Delta \mathcal{U}}{\mathcal{U}_r} - \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta \mathcal{U}}{\mathcal{U}_r} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta \mathcal{U}}{\mathcal{U}_r} \right)^3 \dots \\ &\quad - \frac{(-1)^n}{n} \left( \frac{\Delta \mathcal{U}}{\mathcal{U}_r} \right)^n.\end{aligned}$$

Dans le cas d'une variation de volume massique positive, soit pour un écoulement chauffé ou un écoulement de mélange par addition d'un gaz léger ou un écoulement dynamiquement compressible, la limite  $|\Theta| < \ln 2$  s'écrit:

$$0 < \frac{\Delta \mathcal{U}}{\mathcal{U}_r} = -\frac{\Delta \rho}{\rho} < 1 \quad \left( \text{soit } -\frac{\Delta \rho}{\rho_r} < 0,5 \right).$$

Dans le cas d'une variation de volume massique négative, soit pour un écoulement refroidi ou un écoulement de mélange par addition d'un gaz lourd, la limite  $|\Theta| < \ln 2$  s'écrit:

$$0 < \frac{\Delta \rho}{\rho_r} = -\frac{\Delta \mathcal{U}}{\mathcal{U}} < 1$$

### 3.1.1. Ecoulements à faible taux de variation de volume tels que $|\Theta| \ll 1$

On considère que  $\Theta$  (donc  $\Theta^{(n)}$ ) est négligé devant l'unité, alors l'équation (2') devient:

$$\text{div } \vec{U} \cong \frac{\partial}{\partial t} \Theta^{(n)} + \text{div}(\Theta^{(n)} \vec{U}). \quad (2'')$$

De même que dans les calculs précédents la divergence de la vitesse peut être substituée dans l'équation (3) ce qui conduit à:

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \text{div}(\Psi \vec{U} - \vec{J}) - \mathcal{A} \right\} \\ - \Psi \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Theta^{(n)} + \text{div}(\Theta^{(n)} \vec{U}) \right\} + \vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta^{(n)} \cong 0\end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \text{div}(\Psi \vec{U} - \vec{J}) - \mathcal{A} \right\} \\ - \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\Psi \Theta^{(n)}) + \text{div}(\Psi \Theta^{(n)} \vec{U} - \vec{J} \Theta^{(n)}) - \mathcal{A} \Theta^{(n)} \right\} \\ + \Theta^{(n)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \text{div}(\Psi \vec{U} - \vec{J}) - \mathcal{A} \right\} \\ - \Theta^{(n)} \Psi \text{div } \vec{U} + \vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta^{(n)} \cong 0\end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (\Psi (1 - \Theta^{(n)})) + \text{div}((\Psi \vec{U} - \vec{J})(1 - \Theta^{(n)})) \\ - \mathcal{A} (1 - \Theta^{(n)}) \cong -\Theta^{(n)} \vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta^{(n)}\end{aligned}$$

Les résultats obtenus dans le cas plus général d'un développement limité à l'ordre n pour  $\Theta$  entraînent:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi + \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} \Psi - \text{div } \vec{J} - \mathcal{A} = 0$$

$$\Psi \text{div } \vec{U} \cong 0$$

et

$$\vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta^{(n)} \cong 0$$

Il s'agit ici des situations d'écoulement où il est usuel d'appliquer les hypothèses simplificatrices de Boussinesq. On postulera ici que cette condition est réalisée pour  $|\Theta| \sim 0,01$  qui correspond à la précision usuelle des calculs, alors le centième est négligé devant l'unité. L'estimation est donnée en choisissant  $\mathcal{U}_r = \mathcal{U}_{\min}$  valeur minimale du volume massique dans le domaine considérée pour les écoulements chauffés ou de mélange par addition d'un gaz léger ou valeur d'arrêt ou réservoir pour les effets de compressibilité dynamique en fonction du nombre de Mach (ou  $\mathcal{U}_{\max}$  valeur maximale du volume massique dans le domaine considérée pour les écoulements refroidis ou de mélange par addition d'un gaz lourd). Elle est donnée en écart maximal de température ou en nombre de Mach global de l'écoulement.

Cette condition se traduit par  $|\frac{\Delta \rho}{\rho}| \cong |\frac{\Delta \rho}{\rho_r}| < 0,01$  en assimilant  $\rho_r$  à  $\rho_0$ , pour le calcul en fonction du nombre de Mach l'estimation est donnée pour un écoulement isentropique de gaz parfait avec:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_a^2 \right)^{1/(\gamma - 1)}$$

alors  $|\frac{\Delta \rho}{\rho_r}| < 0,01$  et  $|\Delta T| < 3 \text{ K}$  ( $T_0 \approx 300 \text{ K}$ ) ou  $M_a < 0,142$  (Tableaux 1 and 2 et Fig. 1 and 2) quand elle est appliquée pour les valeurs extrêmes du volume massique dans tout le domaine d'étude. Quand le raisonnement peut être développé localement à l'intérieur de zones locales d'influence (par exemple zone de paroi ou zone de l'écoulement extérieur ou portion de tuyère) les critères deviennent avec ou  $|\left(\frac{\Delta \rho}{\rho_r}\right)_1| + \left(\frac{\Delta \rho}{\rho_r}\right)_2| < 0,02$ :  $|\Delta T| < 6 \text{ K}$  ( $T_0 \approx 300 \text{ K}$ ) ou  $M_a < 0,2$ . Dans ce cas l'analyse se fait par zone, le problème est reporté à celui du raccordement entre zones.

3.1.2. Cas des écoulements à variation relative de volume non négligeable tels que

$$\varepsilon = -\left(1 - \Theta - \frac{\mathcal{U}_r}{\mathcal{U}}\right) \text{ et } |\varepsilon| \ll 1.$$

La condition  $|\Theta| \ll 1$  n'est plus réalisée, il faut examiner quelle est la limite d'utilisation du découpage des équations, quand ce découpage est encore considéré comme une propriété. Les critères portent toujours sur l'écart maximal de température ou le nombre de Mach.

Considérons l'équation exacte issue d'un bilan intégral volumique de la grandeur  $\rho\Psi$  (1'), réduite sur un élément de volume, où  $\rho$  est écrit  $1/\mathcal{U}$ , et multipliée par  $\mathcal{U}_r$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \Psi \frac{\mathcal{U}_r}{\mathcal{U}} \right) + \text{div} \left( (\Psi \vec{U} - \vec{J}) \frac{\mathcal{U}_r}{\mathcal{U}} \right) - \mathcal{A} \frac{\mathcal{U}_r}{\mathcal{U}} = 0 \quad (1'')$$

L'équation (1'') est retranchée de l'équation (4)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \Psi \left( 1 - \Theta - \frac{\mathcal{U}_r}{\mathcal{U}} \right) \right) \\ & > + \text{div} \left( (\Psi \vec{U} - \vec{J}) \left( 1 - \Theta - \frac{\mathcal{U}_r}{\mathcal{U}} \right) \right) \\ & - \mathcal{A} \left( 1 - \Theta - \frac{\mathcal{U}_r}{\mathcal{U}} \right) = -\Theta \left( \Psi \text{div} \vec{U} - \vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta \right) \end{aligned}$$

soit:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\Psi \varepsilon) + \text{div} \left( (\Psi \vec{U} - \vec{J}) \varepsilon \right) - \mathcal{A} \varepsilon \\ & = \Theta \left( \Psi \text{div} \vec{U} - \vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta \right) \end{aligned}$$

Tableau 1  
Valeurs des paramètres  $\Theta, \varepsilon, \Delta\rho/\rho_r, \Delta\mathcal{U}/\mathcal{U}_r$ , en fonction de la variation maximale de température  $\Delta T$

$\Delta T/T_0$	$\varepsilon$	$\Theta$	$\Delta\rho/\rho_r$	$\Delta\mathcal{U}/\mathcal{U}_r$
-0,5	0,30685	-0,693	1,000	-0,5
-0,176	0,02001	-0,194	0,214	-0,176
-0,134	0,01086	-0,144	0,155	-0,134
-0,02	0,00021	-0,020	0,020	-0,02
-0,01	0,00005	-0,010	0,010	-0,01
0,01	0,00005	0,010	-0,010	0,01
0,02	0,00019	0,020	-0,020	0,02
0,156	0,01002	0,145	-0,135	0,156
0,23	0,02002	0,207	-0,187	0,23
0,6	0,09500	0,470	-0,375	0,6
1	0,19315	0,693	-0,500	1

Tableau 2  
Valeurs des paramètres  $\Theta, \varepsilon, \Delta\rho/\rho_r, \Delta\mathcal{U}/\mathcal{U}_r$ , en fonction du nombre de Mach de l'écoulement

$M_a$	$\varepsilon$	$\Theta$	$\Delta\rho/\rho_r$	$\Delta\mathcal{U}/\mathcal{U}_r$
0,142	0,00005	0,010	-0,010	0,010
0,2	0,00020	0,020	-0,020	0,020
0,547	0,01006	0,145	-0,135	0,156
0,66	0,02036	0,209	-0,188	0,232
0,8	0,04111	0,301	-0,260	0,351
0,9	0,06240	0,375	-0,313	0,456
1	0,08974	0,456	-0,366	0,577
1,1	0,12350	0,542	-0,418	0,719
1,263	0,19270	0,692	-0,500	0,998

Le paramètre  $\varepsilon$  permet de quantifier plus précisément la part de la variation de volume qui n'agit que pour les changements directs des grandeurs physiques. En d'autres termes et en utilisant l'écriture conventionnelle avec la masse volumique, on peut considérer la distribution suivante:

$$\rho = \rho_r + (\Delta\rho)_1 + (\Delta\rho)_2 + (\Delta\rho)_3.$$

Quand  $\Theta < 0,01$ ,  $(\Delta\rho)_2 + (\Delta\rho)_3 \approx 0$ , la contribution de  $(\Delta\rho)_1$  dans le bilan est telle qu'il ne se différencie pas d'un bilan de fluide incompressible. Quand  $\Theta > 0,01$  mais  $\varepsilon < 0,01$ ,  $(\Delta\rho)_2$  n'agit que sur les changements directs des grandeurs physiques et peut être quantifié en utilisant  $\varepsilon$ , alors  $(\Delta\rho)_3$  représente la part de la masse volumique responsable des effets de dilatation, effets isolés au second membre de l'équations (4).

Par addition de l'équation (3) à la dernière équation en  $\varepsilon$ , il vient:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\Psi(1 - \varepsilon)) + \text{div} \left( (\Psi \vec{U} - \vec{J})(1 - \varepsilon) \right) - \mathcal{A}(1 - \varepsilon) \\ & = (1 - \Theta) \left( \Psi \text{div} \vec{U} - \vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta \right) \end{aligned}$$

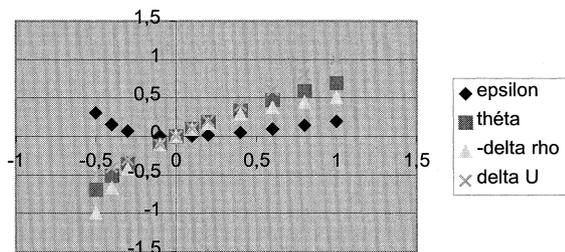


Fig. 1. Valeurs des paramètres  $\Theta, \varepsilon, \Delta = \Delta\mathcal{U}/\mathcal{U}_r$ , en fonction de la variation maximale de température  $\Delta T$ .

Ici  $\text{div } \vec{U}$  peut être non négligeable mais son ordre de grandeur reste petit, il n'y a donc pas de fortes variations de  $\varepsilon$  du type discontinuité le long d'une ligne de courant,  $\varepsilon$  étant lié au champ des vitesses par:

$$\frac{d}{dt} \varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{U}}{\mathcal{U}} \text{div } \vec{U} = -\frac{\Delta \rho}{\rho_r} \text{div } \vec{U} \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon + \text{div}(\varepsilon \vec{U}) = \left( \varepsilon - \frac{\Delta \rho}{\rho_r} \right) \text{div } \vec{U}$$

En conséquence  $\varepsilon$  est négligé devant l'unité alors que  $\Theta$  n'est pas négligeable devant l'unité, il en résulte que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \text{div}(\Psi \vec{U} - \vec{J}) - \mathcal{A} &= \Psi \text{div } \vec{U} - \vec{J} \cdot \text{grad } \Theta \\ &= (1 - \Theta) (\Psi \text{div } \vec{U} - \vec{J} \cdot \text{grad } \Theta) = 0 \end{aligned}$$

Cette relation permet de proposer comme critère d'application des propriétés de découpage des équations, que  $\varepsilon$  doit être négligeable devant l'unité.

Appliquant à  $\varepsilon$  le critère numérique précédemment utilisé (soit  $|\varepsilon| < 0,01$ ), cette dernière relation argumente en faveur de l'utilisation du découpage des équations, proposé en tant que propriété physique pour (Tableaux et Figs. 1 and 2). Alors

$$\begin{aligned} 0,01 < -\frac{\Delta \rho}{\rho_r} < 0,135 \quad \text{et} \quad 3 \text{ K} < \Delta T \\ < 47 \text{ K} \quad (T_0 \approx 300 \text{ K}) \quad \text{ou} \quad 0,142 < M_a < 0,547, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 0,01 < \frac{\Delta \rho}{\rho_r} < 0,155 \quad \text{et} \quad -40 \text{ K} < \Delta T < -3 \text{ K} \\ (T_0 \approx 300 \text{ K}). \end{aligned}$$

Quand le raisonnement peut être développé localement à l'intérieur de zones locales d'influence (par exemple

zone de paroi ou zone de l'écoulement extérieur) les critères deviennent:

$$\begin{aligned} 0,02 < -\frac{\Delta \rho}{\rho_r} < 0,187 \\ \text{et} \quad 3 \text{ K} < \Delta T < 69 \text{ K} \quad (T_0 \approx 300 \text{ K}) \\ \text{ou} \quad 0,142 < M_a < 0,547, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 0,02 < \frac{\Delta \rho}{\rho_r} < 0,213 \quad \text{et} \quad -53 \text{ K} < \Delta T < -6 \text{ K} \\ (T_0 \approx 300 \text{ K}). \end{aligned}$$

Ici la séparation de l'équation de bilan en deux équations distinctes apparaît comme une propriété de la physique de l'écoulement.

- Les effets locaux mécaniques de la variation de volume n'influent pas notablement sur les grandeurs physiques transportées, par contre, ils agissent sur le transport.
- Les effets locaux mécaniques de la variation de volume sont reliés par une équation explicite.

### 3.1.3. Modèle

En théorie l'hypothèse formulée nous autorise à appliquer les propriétés de découpage des équations de bilan pour des valeurs de  $|\Theta| < \ln 2$ . La valeur de  $n$  doit être aussi grande qu'il est nécessaire mais doit rester finie, aussi la validité des conclusions n'est pas certaine pour des valeurs de  $\Theta$  telles que  $\frac{\Delta \rho}{\rho_r}$  (ou  $\frac{\Delta \mathcal{U}}{\mathcal{U}_r}$ ) soit proche de 1. En effet si  $\frac{\Delta \rho}{\rho_r} \rightarrow 1$  (ou  $\frac{\Delta \mathcal{U}}{\mathcal{U}_r} \rightarrow 1$  ce qui correspond à  $\frac{\Delta \rho}{\rho_r} \rightarrow -0,5$ ) par valeurs inférieures, alors  $n \rightarrow \infty$ . Par suite, il est proposé de présenter le découpage des équations de bilan comme un modèle d'analyse de la physique des mécanismes en jeu, la borne d'utilisation sera ainsi liée à la possibilité d'écrire le

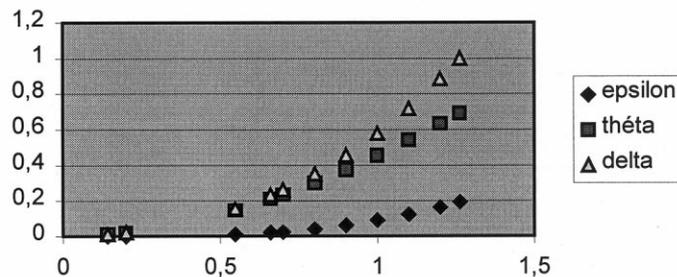


Fig. 2. Valeurs des paramètres  $\Theta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\Delta = \Delta \mathcal{U} / \mathcal{U}_r$ , en fonction du nombre de Mach de l'écoulement.

développement en série, soit  $|\Theta| < \ln 2$  et

$$0,135 < -\frac{\Delta\rho}{\rho_r} < 0,5$$

$$\text{et } 47 \text{ K} < \Delta T < 300 \text{ K} (T_0 \approx 300 \text{ K})$$

$$\text{ou } 0,547 < M_a < 1,26,$$

ou

$$0,155 < \frac{\Delta\rho}{\rho_r} < 1 \quad \text{et} \quad -150 \text{ K} < \Delta T < -40 \text{ K}$$

$$(T_0 \approx 300 \text{ K}).$$

Au-delà, et dans l'état actuel de ce travail, il ne sera pas proposé de découpage pour les équations de bilan.

### 3.1.4. Valeurs numériques pour les critères proposés

Les valeurs numériques sont calculées en utilisant des relations simplifiées: Gaz parfait à coefficient de dilatation des gaz constant ou gaz parfait isentropique non visqueux.

## 4. Interpretation physique. Classes d'écoulements

L'équation (1) est réécrite en utilisant  $\vec{J} = \rho\vec{J}$ :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho\Psi \, dv = \int_V \rho\mathcal{A} \, dv + \int_S \rho\vec{J} \cdot \vec{n} \, ds$$

où  $\rho\vec{J}$  est la source surfacique de création ou destruction de  $\rho\Psi$  à la frontière  $S$ ,  $\rho\mathcal{A}$  la source volumique.

Si  $|\Theta| < \ln 2$ , il est proposé d'écrire le bilan intégral volumique à partir du bilan local massique primaire (6a):

$$\int_V \left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \text{div}(\Psi\vec{U}) \right) dv = \int_V \mathcal{A} \, dv + \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, ds,$$

soit:

$$\frac{d}{dt} \int_V \Psi \, dv = \int_V \mathcal{A} \, dv + \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, ds.$$

Cette équation comparée à l'équation (1) montre que dans ce cas, les variations de masse volumique sont telles que les opérateurs mathématiques  $\Psi$  sont insensibles; tout se passe comme si celle-ci était constante, de ce fait la masse volumique n'est plus une variable explicite de l'équation primaire. Par contre le champ de vitesse doit, par l'intermédiaire de sa divergence, obéir à l'équation complémentaire de bilan

$$\Psi \text{ div } \vec{U} - \vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta = 0$$

où apparaît le paramètre  $\Theta$  qui donne une écriture

Tableau 3  
Critères de classification des écoulements en fonction des possibilités de découpage des équations de bilan (Propriété: il s'agit d'une propriété de l'écoulement; modèle: le découpage est proposé à titre de modèle)

	Découpage	$\Delta T/T_0$	$M_a$
Quasi incompressible, 'Boussinesq'	/	$ \Delta T/T_0  < 0,01$	$M_a < 0,142$
Compressible subsonique/dilatatable 1	Propriété	$0,01 < \Delta T/T_0 < 0,156$ ou $0,01 < -\Delta T/T_0 < 0,134$	$0,142 < M_a < 0,547$
Compressible 1/dilatatable 2	Modèle	$0,156 < \Delta T/T_0 < 1$ ou $0,134 < -\Delta T/T_0 < 0,5$	$0,547 < M_a < 1,26$
Compressible 2	Non	$\Delta T/T_0 > 1$ ou $\Delta T/T_0 < -0,5$	$1,26 < M_a$

complémentaire à  $\text{div } \vec{U}$  pour le taux de variation de volume. En effet il est remarquable que (6b) s'écrit aussi:

$$\Psi \frac{\partial}{\partial t} \Theta + (\Psi \vec{U} - \vec{J}) \cdot \vec{\text{grad}} \Theta = 0.$$

En résumé si  $|\Theta| < \ln 2$ ,  $\vec{J}$  apparaît comme la source surfacique de création ou destruction de la grandeur physique  $\Psi$ ,  $\mathcal{A}$  étant la source volumique, pour un bilan primaire sur un volume variable, dont les corrections de variabilité sont isolées par un bilan secondaire du paramètre de variation volumique  $\Theta$ .

si  $|\Theta| > \ln 2$ , les bilans primaires et secondaires ne sont plus séparables, mais une même distribution des rôles de chacun des groupes de termes au sein de l'équation complète reste très probable en ce qui concerne les effets dominants,  $\rho$  n'est plus une variable du système, elle est remplacée par  $\Theta$ .

Les conditions d'application permettent de donner une classification des écoulements des gaz sous la forme de tableau (Tableaux 3 and 4).

### 5. Consequences

Les considérations qui suivent sont développées dans le cas où les équations de bilan peuvent être séparées en deux sous équations.

#### 5.1. Application à l'équation de Navier–Stokes

L'équation est écrite en référence à un champ adiabatique au repos dont les grandeurs caractéristiques sont notées avec l'indice 0.

En utilisant les notations conventionnelles,  $\otimes$  produit tensoriel,  $\nu$  viscosité cinématique,  $\vec{D}$  tenseur des taux de déformation, les grandeurs sont écrites en référence aux valeurs de l'état adiabatique au repos,  $P - P_0$  et  $\mathcal{U} - \mathcal{U}_0$ . Les équations sont écrites par unité de masse pour l'état considéré et l'état de référence,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} \vec{U} + \mathcal{U} \vec{\text{grad}} \left( P + \frac{2\mu}{3} \text{div } \vec{U} \right) \\ - \mathcal{U} \vec{\text{div}} \left( 2\mu \vec{D} \right) - \vec{g} = \vec{0} \quad \mathcal{U}_0 \vec{\text{grad}} (P_0) - \vec{g} = \vec{0}. \end{aligned}$$

L'équation en référence à un champ adiabatique au repos s'obtient par différence de ces deux équations, les termes de flottabilité n'apparaissent donc pas explicitement dans cette représentation.

On déduit alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \vec{\text{div}} (\vec{U} \otimes \vec{U}) + \mathcal{U} \vec{\text{grad}} P - \mathcal{U}_0 \vec{\text{grad}} P_0 \\ + \vec{\text{div}} \left( \left( \frac{2}{3} \nu \text{div } \vec{U} \right) \vec{1} - 2\nu \vec{D} \right) \\ - \vec{U} \text{div } \vec{U} - \left( \left( \frac{2}{3} \nu \text{div } \vec{U} \right) \vec{1} - 2\nu \vec{D} \right) \vec{\text{grad}} \Theta = \vec{0}, \end{aligned}$$

soit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \vec{\text{div}} (\vec{U} \otimes \vec{U} - 2\nu \vec{D}) \\ + \vec{\text{grad}} \left( \mathcal{U} P - \mathcal{U}_0 P_0 + \frac{2\nu}{3} \text{div } \vec{U} \right) \\ - \mathcal{U}_0 P_0 \vec{\text{grad}} (\Theta - \Theta_0) - \vec{U} \text{div } \vec{U} \\ - \left( \left( \mathcal{U} P - \mathcal{U}_0 P_0 + \frac{2\nu}{3} \text{div } \vec{U} \right) \vec{1} - 2\nu \vec{D} \right) \cdot \vec{\text{grad}} \Theta = \vec{0}. \end{aligned}$$

Alors l'hypothèse des gaz parfaits conduit à une écriture où la pression n'est plus présente explicitement et l'utilisation de la propriété des équations de bilan avec:

$$\begin{aligned} \Psi = \vec{U}, \quad \vec{J} = - \left( r(T - T_0) + \frac{2\nu}{3} \text{div } \vec{U} \right) \vec{1} + 2\nu \vec{D} \quad \text{et} \\ \mathcal{A} = rT_0 \vec{\text{grad}} (\Theta - \Theta_0). \end{aligned}$$

Tableau 4

Correspondance entre classes d'écoulement et formes utilisables des équations de bilan

		Découpage
Incompressible/quasi incompressible/'boussinesq'	$ \Theta  < 0,01$	$\frac{\partial}{\partial t} \Psi + \vec{U} \cdot \vec{\text{grad}} \Psi - \text{div } \vec{J} - \mathcal{A} = 0$ $\Psi \text{div } \vec{U} \cong 0$ et $\vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta^{(n)} \cong 0$
Compressible subsonique/dilatable 1 subsonique	$0,01 <  \Theta ,  \Theta  < 0,145$	$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi) + \text{div}(\Psi \vec{U} - \vec{J}) - \mathcal{A} = 0$ et $\Psi \text{div } \vec{U} - \vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta = 0$
Compressible 1/dilatable 2 subsonique	$0,145 <  \Theta ,  \Theta  < \ln 2$	$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi) + \text{div}(\Psi \vec{U} - \vec{J}) - \mathcal{A} = 0$ et $\Psi \text{div } \vec{U} - \vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta = 0$
Compressible 2	$\ln 2 <  \Theta $	$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi) + \text{div}((\Psi \vec{U} - J)) - \mathcal{A} - \Psi \text{div } \vec{U} + \vec{J} \cdot \vec{\text{grad}} \Theta = 0$

Par application du bilan réduit (6a), il vient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \text{div} \left( \vec{U} \otimes \vec{U} + \left( r(T - T_0) + \frac{2\nu}{3} \text{div} \vec{U} \right) \vec{1} - 2\nu \vec{D} \right) - rT_0 \text{grad} (\Theta - \Theta_0) = \vec{0}$$

et la condition (6b) donne:

$$\vec{U} \text{div} \vec{U} + \left( \left( r(T - T_0) + \frac{2\nu}{3} \text{div} \vec{U} \right) \vec{1} - 2\nu \vec{D} \right) \cdot \text{grad} \Theta = \vec{0}. \tag{8}$$

L'écriture de l'équation en référence à l'état adiabatique au repos est incontournable pour assurer la compatibilité des équations avec cet état de référence. On note que l'équation (7) ne présente aucune difficulté supplémentaire relativement à l'ordre des corrélations, par rapport à l'écriture pour un écoulement incompressible et que l'équation (8) s'écrit aussi

$$\vec{U} \frac{\partial}{\partial t} \Theta + \left( \vec{U} \otimes \vec{U} + \left( r(T - T_0) + \frac{2\nu}{3} \text{div} \vec{U} \right) \vec{1} - 2\nu \vec{D} \right) \times \text{grad} \Theta = \vec{0}. \tag{8'}$$

L'équation (8) implique que si  $\text{div} \vec{U}$  est négligé, alors  $\text{grad} \Theta$  doit être négligé aussi. Dans ce cas l'équation (7) devient identique à celle écrite suivant les hypothèses simplificatrices de Boussinesq. Notre formulation est donc plus générale que celle de Boussinesq, en particulier elle tient compte de la divergence de la vitesse que l'on sait non nulle dès que l'écoulement est non horizontal.

L'équation (8') indique aussi que si l'écoulement est stationnaire, le terme  $(\vec{U} \otimes \vec{U} + (r(T - T_0) + \frac{2\nu}{3} \text{div} \vec{U}) \vec{1} - 2\nu \vec{D}) \cdot \text{grad} \Theta$  est nul, ce qui correspond au cas des écoulements uniformes laminaires horizontaux stratifiés.

### 5.2. Application au bilan d'énergie totale

Le premier principe de la thermodynamique conduit au bilan suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( c_v T + \frac{U^2}{2} \right) - \mathcal{U} \text{div} \left( \vec{\Sigma} \cdot \vec{U} + k \text{grad} T \right) \\ - \vec{g} \cdot \vec{U} - \mathcal{R}_a = 0 \\ \text{avec pour le champ adiabatique:} \\ \vec{g} = \mathcal{U}_0 \text{grad} P_0 = \text{grad}(rT_0) - rT_0 \text{grad} \Theta_0 \end{array} \right.$$

En utilisant les notations conventionnelles,  $\gamma = c_p/c_v$  le rapport des chaleurs massiques,  $\alpha = k/\rho c_p$  la diffusivité thermique et  $\mathcal{R}_a$  le rayonnement massique,

$\vec{\Sigma}$  le tenseur des contraintes. De même qu'il fut nécessaire d'écrire l'équation de Navier-Stokes en référence à la situation statique, nous écrivons ici l'équation d'énergie en référence à la situation adiabatique.

$$\frac{d}{dt} \left( c_v T + \frac{U^2}{2} \right) - \mathcal{U} \text{div} \left( \vec{\Sigma} \cdot \vec{U} + k \text{grad} T - k_0 \text{grad} T_0 \right) + rT_0 \vec{U} \cdot \text{grad} \Theta_0 - \vec{U} \cdot \text{grad} (rT_0) - \mathcal{R}_a = 0.$$

En effet, pour l'état adiabatique, l'accélération de la pesanteur est substituée en fonction des grandeurs d'état et  $k_0 \text{grad} T_0$  (= constante) peut être introduit sous la divergence.

Alors les développements explicités précédemment donnent

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( c_v T + \frac{U^2}{2} \right) + \text{div} \left( \left( c_v T + \frac{U^2}{2} \right) \vec{U} \right) \\ & + rT_0 \text{div} \vec{U} + \text{div} \left( \left( rT - rT_0 + \frac{2}{3} \nu \text{div} \vec{U} \right) \vec{U} \right. \\ & \left. - 2\nu \vec{D} \cdot \vec{U} - \alpha c_p \left( \text{grad} T - \frac{k_0}{k} \text{grad} dT_0 \right) \right) \\ & + rT_0 \vec{U} \cdot \text{grad} (\Theta - \Theta_0) - \mathcal{R}_a \\ & - \left( c_v T + \frac{U^2}{2} \right) \text{div} \vec{U} - \left( \left( rT - rT_0 + \frac{2}{3} \nu \text{div} \vec{U} \right) \cdot \vec{U} \right. \\ & \left. - 2\nu \vec{D} \cdot \vec{U} - \alpha c_p \left( \text{grad} T - \frac{k_0}{k} \text{grad} T_0 \right) \right) \text{grad} \Theta = 0 \end{aligned}$$

soit en appliquant les résultats précédents avec:

$$\begin{aligned} \Psi &= c_v T + \frac{U^2}{2}, \\ \vec{J} &= - \left( r(T - T_0) + \frac{2\nu}{3} \text{div} \vec{U} \right) \vec{U} + 2\nu \vec{D} \cdot \vec{U} \\ &\quad - \alpha c_p \left( \text{grad} T - \frac{k_0}{k} \text{grad} T_0 \right) \text{et} \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = rT_0 \text{div} \vec{U} + rT_0 \vec{U} \cdot \text{grad} (\Theta - \Theta_0) - \mathcal{R}_a,$$

le bilan réduit (6a) donne:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left( c_v T + \frac{U^2}{2} \right) \\
& + \operatorname{div} \left( \left( c_p T - r T_0 + \frac{U^2}{2} + \frac{2}{3} \nu \operatorname{div} \vec{U} \right) \cdot \vec{U} \right. \\
& \left. - 2\nu \vec{D} \cdot \vec{U} - \alpha_{cp} \left( \vec{\operatorname{grad}} T - \frac{k_0}{k} \vec{\operatorname{grad}} T_0 \right) \right) \\
& + r T_0 \operatorname{div} \vec{U} + r T_0 \vec{U} \cdot \vec{\operatorname{grad}} (\Theta - \Theta_0) - \mathcal{R}_a = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

et la condition (6b) s'écrit:

$$\begin{aligned}
& \left( c_v T + \frac{U^2}{2} \right) \operatorname{div} \vec{U} \\
& + \left( \left( r T - r T_0 + \frac{2}{3} \nu \operatorname{div} \vec{U} \right) \cdot \vec{U} - 2\nu \vec{D} \cdot \vec{U} \right. \\
& \left. - \alpha_{cp} \left( \vec{\operatorname{grad}} T - \frac{k_0}{k} \vec{\operatorname{grad}} T_0 \right) \right) \vec{\operatorname{grad}} \Theta = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

### 5.3. Application au bilan d'énergie cinétique

Le bilan d'énergie cinétique s'obtient par le produit scalaire des équations (7) and (8) avec le vecteur  $\vec{U}$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \frac{U^2}{2} + \operatorname{div} \left( \frac{U^2}{2} \vec{U} - 2\nu \vec{D} \cdot \vec{U} \right) + 2\nu \vec{D} : \vec{\operatorname{grad}} \vec{U} \\
& + \frac{U^2}{2} \operatorname{div} \vec{U} + \operatorname{div} \left( \left( r T - r T_0 + \frac{2\nu}{3} \operatorname{div} \vec{U} \right) \vec{U} \right) \\
& - \left( r T - r T_0 + \frac{2\nu}{3} \operatorname{div} \vec{U} \right) \operatorname{div} \vec{U} \\
& - r T_0 \vec{U} \cdot \vec{\operatorname{grad}} (\Theta - \Theta_0) = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

et

$$\begin{aligned}
& + U^2 \operatorname{div} \vec{U} + \vec{U} \left[ \left( \left( r T - r T_0 + \frac{2\nu}{3} \operatorname{div} \vec{U} \right) \vec{U} \right. \right. \\
& \left. \left. - 2\nu \vec{D} \right) \vec{\operatorname{grad}} \Theta \right] = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

### 5.4. Déduction de l'énergie interne

En soustrayant l'équations (11) de l'équation (9), puis (12) de (10), viennent:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (c_v T) \\
& + \operatorname{div} \left( \left( c_v T \vec{U} - \alpha_{cp} \left( \vec{\operatorname{grad}} T - \frac{k_0}{k} \vec{\operatorname{grad}} T_0 \right) \right) \right) \\
& + \left( r T - \frac{U^2}{2} + \frac{2}{3} \nu \operatorname{div} \vec{U} \right) \operatorname{div} \vec{U} - 2\nu \vec{D} : \vec{\operatorname{grad}} \vec{U} \\
& - \mathcal{R}_a = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
& \left( c_v T - \frac{U^2}{2} \right) \operatorname{div} \vec{U} - \alpha_{cp} \left( \vec{\operatorname{grad}} T - \frac{k_0}{k} \vec{\operatorname{grad}} T_0 \right) \\
& \times \vec{\operatorname{grad}} \Theta = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Il est remarquable ici que si l'analyse initiale ait porté sur un bilan d'énergie interne et non d'énergie totale une autre séparation des grandeurs physiques aurait été déduite, sensiblement différente, dans le cas général, de celle qui vient d'être écrite. Sur le plan de la physique la démarche proposée ne peut être opérée que sur un bilan global de forces, d'énergie ou de masse, et non sur un bilan partiel. L'écriture des bilans en référence à un champ adiabatique de gaz pur au repos est indispensable pour assurer la cohérence de la séparation du bilan en deux équations distinctes avec les conditions limites d'un champ adiabatique au repos.

Il existe un terme de corrélation d'ordre 3 dans l'équation d'énergie qui ajoute à la complexité de l'équation. Cette difficulté est évitée dans le cas d'applications de l'analyse aux écoulements subsoniques tels que  $M_a \ll 1$ :

- Dans le cas des écoulements en convection naturelle ou en convection mixte,  $U^2/2$  est négligeable devant  $rT$  (et a fortiori devant  $c_v T$ ).
- Dans le cas des écoulements en convection forcée, le nombre de Mach  $M_a^2$  sera introduit en postulant l'écoulement isentropique de gaz parfaits. Alors,

$$\left( \left( r T - \frac{U^2}{2} \right) \operatorname{div} \vec{U} = \left( 1 - \frac{\gamma}{2} M_a^2 \right) r T \operatorname{div} \vec{U}. \right.$$

Cette écriture permet de développer les analyses en fonction du nombre de Mach et montre que  $\frac{U^2}{2} \operatorname{div} \vec{U}$  peut être négligé pour les écoulements tels que  $M_a \ll 1$ , un ordre de grandeur utilisant les mêmes critères numériques que précédemment peut être donné:  $|\Theta| < 1$  et  $M_a < 0,12$ . Alors en restriction aux écoulements subsoniques à faible nombre de Mach, l'équation (13) devient:

$$\frac{\partial}{\partial t} (c_v T) + \operatorname{div} \left( \left( c_v T \vec{U} + \vec{Q} \right) - \vec{\Sigma} : \vec{D} - \mathcal{R}_a \right) = 0 \tag{13'}$$

avec  $\vec{Q} = -\alpha_{cp} \left( \vec{\operatorname{grad}} T - \frac{k_0}{k} \vec{\operatorname{grad}} T_0 \right)$ ,

$\vec{\Sigma} = (2\nu\vec{D} - (rT + \frac{2}{3}\nu \operatorname{div} \vec{U})\vec{I})$ ,  $\vec{I}$  le tenseur unité. Cette écriture est générique quelle que soit la grandeur dont on écrit le bilan, le volume massique, la pression et le paramètre de dilatation n'apparaissent pas dans la formulation de l'équation réduite.

De même, la condition de changement de volume exprimée par l'équation (14) devient

$$c_v T \operatorname{div} \vec{U} - \alpha c_p \left( \operatorname{grad} T - \frac{k_0}{k} \operatorname{grad} T_0 \right) \cdot \vec{\operatorname{grad}} \Theta = 0. \quad (14')$$

Ainsi les analyses globales développées pour le bilan d'énergie totale ou pour le bilan d'énergie interne aboutissent à la même formulation.

### 5.5. Application à l'équation d'évolution d'une espèce dans un mélange binaire passif

L'équation de bilan de masse pour le constituant de concentration massique  $C$  s'écrit:

$$\frac{dC}{dt} - \mathcal{U} \operatorname{div} (D \vec{\operatorname{grad}} C) = 0,$$

où  $D$  représente le coefficient de diffusivité de ce même constituant.

En appliquant la démarche présente et en posant  $\mathcal{D} = \mathcal{U}D$ , il vient:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \operatorname{div} (C \vec{U} - \mathcal{D} \vec{\operatorname{grad}} C) = 0 \quad (15)$$

et

$$C \operatorname{div} \vec{U} - \mathcal{D} \vec{\operatorname{grad}} C \cdot \vec{\operatorname{grad}} \Theta = 0. \quad (16)$$

## 6. Conclusion

Le nouveau système d'équation proposé par la présente démarche, appliqué aux écoulements subsoniques à taux de variation de volume et à nombre de Mach tels que  $-0,5 < \Delta\rho/\rho_0 < 1$ , permet de simplifier les équations des gaz compressibles au niveau de l'ordre des corrélations du type  $\Psi\vec{U}$ . Chaque bilan, de masse, de forces et d'énergie, est écrit par unité de masse du fluide. La continuité s'énonce alors sous une formulation introduisant un nouveau paramètre  $\Theta = \ln \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{U}_r} = -\ln \frac{\rho}{\rho_r}$  appelé ici paramètre de variation volumique ( $\rho_r = \text{constante} \approx \rho_0$ ). Les propriétés moléculaires sont des propriétés cinématiques, viscosité ou diffusivité moléculaires. La pression n'apparaît plus comme une variable du système ce qui permet de contourner une difficulté majeure pour la modélisation, la modélisation des termes de pression. Toutes les grandeurs sont des

grandeurs usuellement mesurables dans les expérimentations, hormis le paramètre de variation volumique  $\Theta$  qui sera, soit déduit du bilan, soit mesuré, s'il est possible d'accéder à la mesure de la masse volumique. En effet la masse volumique instantanée pose un réel problème métrologique, cette mesure a été réalisée pour la concentration [29–31] mais ce n'est pas encore une mesure couramment usitée. La masse volumique d'un gaz chauffé est déduite d'une utilisation restrictive de la loi d'Etat des gaz parfaits, restriction qui réduit la mesure à son canevas d'observation (dilatation incompressible). On notera aussi que le paramètre  $\Theta$  est isolé dans un seul terme de l'équation qui peut être aisément déduit par la mesure de tous les autres termes du bilan. Le couplage par la température, des équations d'accélération (Navier–Stokes) et d'énergie interne massique, est bien identifié; il est différent de celui réalisé dans le cas d'un mélange de gaz. Les équations complémentaires issues du découpage doivent permettre de maîtriser un terme le plus souvent annulé ou modélisé grossièrement, qui est le terme de divergence de la vitesse et pour lequel aucune hypothèse n'est formulée. Ce terme est fondamental pour les processus de recalage de la plupart des calculs numériques des champs cinématiques.

Dans un premier temps, la restriction aux écoulements subsoniques ou à taux de variation de volume modéré conduit à la possibilité de séparation des termes de l'équation en deux équations distinctes; une équation de bilan réduit et une équation complémentaire. Aucun terme de l'une ou l'autre de ces deux équations n'est négligé, la soustraction membre à membre des équations séparées restitue l'équation exacte.

Pour  $|\Theta| \ll 1$  ce système d'équation est moins restrictif que celui obtenu par application des hypothèses de Boussinesq, il présente une amélioration notable de la prise en compte de la réalité des mécanismes physiques des écoulements non horizontaux du type convection libre ou convection naturelle.

On montre que ce principe de découpage des équations de bilan peut être proposé comme propriété physique de l'écoulement même si la condition  $|\Theta| \ll 1$  n'est pas réalisée. Pour cela une condition de faisabilité a été déduite des équations exactes, elle porte sur  $\varepsilon = -(1 - \Theta - \mathcal{U}/\mathcal{U}_r)$  et donne une justification du découpage pour les écoulements subsoniques (jusqu'à  $M_a < 0,547$  ou  $-0,135 < \Delta\rho/\rho_0 < 0,156$ ).

L'analyse proposée est ensuite étendue à des écoulements tels que  $|\Theta| < 1$  et pour lesquels la vitesse peut être supersonique avec un nombre de Mach modéré. La condition de séparation des équations de bilan en équation réduite et équation complémentaire est liée à une hypothèse formulée sur le plan mathématique or la continuité dans l'évolution des phénomènes physiques ne permet pas d'affirmer que cette hypothèse soit strictement réalisable à l'approche de  $|\Theta| < 1$ . Aussi

Tableau 5

	Concept	Critere	Equations <sup>a</sup>
Incompressible/quasi incompressible/‘boussinesq’	Propriété	$ \frac{\Delta\rho}{\rho_0}  < 0,01$	$\frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \text{div}(\vec{U} \otimes \vec{U} + (r(T - T_0) + \frac{2\nu}{3} \text{div} \vec{U}) \vec{I} - 2\nu \vec{D}) - rT_0 \text{grad}(\theta - \theta_0) = \vec{0}$ $\frac{\partial}{\partial t}(c_v T) + \text{div}(c_v T \vec{U} + \vec{Q}) - \vec{\Sigma} : \vec{D} - \mathcal{R}_a = 0$ $\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(C \vec{U} - \mathcal{D} \text{grad} C) = 0$
$ \frac{\Delta T}{T_0}  < 0,01$ ou $M_a < 0,142$			
Compressible subsonique/dilatatable 1 subsonique. $-0,01 < \frac{\Delta T}{T_0} < -0,134$ et $0,01 < \frac{\Delta T}{T_0} < 1,56$ ou $0,142 < M_a < 0,547$	Propriété	$-\frac{\Delta\rho}{\rho_0} < 0,135$ et $\frac{\Delta\rho}{\rho_0} < 0,155$	$\frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \text{div}(\vec{U} \otimes \vec{U} + (r(T - T_0) + \frac{2\nu}{3} \text{div} \vec{U}) \vec{I} - 2\nu \vec{D}) - rT_0 \text{grad}(\theta - \theta_0) = \vec{0}$ $\vec{U} \text{div} \vec{U} + ((r(T - T_0) + \frac{2\nu}{3} \text{div} \vec{U}) \vec{I} - 2\nu \vec{D}) \text{grad} \theta = \vec{0}$ $\frac{\partial}{\partial t}(c_v T) + \text{div}(c_v T \vec{U} + \vec{Q}) - \frac{U^2}{2} \text{div} \vec{U} - \vec{\Sigma} : \vec{D} - \mathcal{R}_a = 0$ $(c_v T - \frac{U^2}{2}) \text{div} \vec{U} - \alpha_{cp} (\text{grad} T - \frac{k_0}{k} \text{grad} T_0) \text{grad} \theta = 0$
Compressible 1/dilatatable 2. subsonique. $-0,134 < \frac{\Delta T}{T_0} < -0,5$ et $0,156 < \frac{\Delta T}{T_0} < 1$ ou $0,547 < M_a < 1,26$	Modèle	$-\frac{\Delta\rho}{\rho_0} < 0,5$ et $\frac{\Delta\rho}{\rho_0} < 1$	$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(C \vec{U} - \mathcal{D} \text{grad} C) = 0$ $C \text{div} \vec{U} - \mathcal{D} \text{grad} C \cdot \text{grad} \theta = 0$
Compressible 2. $-0,5 < \frac{\Delta T}{T_0}$ et $1 < \frac{\Delta T}{T_0}$ ou $1,26 < M_a$	Non	$-05 < \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$ et $1 < \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$	Différence des équations 2 par 2. Exemple: $\frac{\partial}{\partial t}(c_v T) + \text{div}(c_v T \vec{U} + \vec{Q}) - \vec{\Sigma} : \vec{D} - \mathcal{R}_a - c_v T \text{div} \vec{U} + \alpha_{cp} (\text{grad} T - \frac{k_0}{k} \text{grad} T_0) \text{grad} \theta = 0$

<sup>a</sup> avec  $\vec{Q} = -\alpha_{cp} (\text{grad} T - \frac{k_0}{k} \text{grad} T_0)$ ,  $\vec{\Sigma} = (2\nu \vec{D} - (rT + \frac{2}{3} \nu \text{div} \vec{U}) \vec{I})$ ,  $\vec{I}$  le tenseur unité,  $\theta = -\ln \frac{\rho}{\rho_0}$ ,  $\rho_t =$  constante  $\approx \rho_0$ .

est-il question ici de proposer la séparation des équations, au titre d'une modélisation des écoulements pour leur analyse, et non en tant que propriété physique de ces écoulements. Pour ce modèle, les conditions s'écrivent:  $M_a < 1,26$  ou  $-0,5 < \Delta\rho/\rho_0 < -0,135$  et  $0,156 < \Delta\rho/\rho_0 < 1$ .

Au delà, pour  $|\Theta| \geq 1$ , la séparation des équations n'est plus réaliste, mais l'écriture proposée pour les bilans conserve les propriétés d'interprétation physique de chaque terme relativement à la variation de volume: Les effets de variation de masse volumique sur les mécanismes physiques sont isolés de ceux appliqués aux grandeurs physiques dont on écrit le bilan, et la pression n'est plus une variable explicite du système.

Ces considérations sont résumées en une proposition de classification des écoulements relativement aux propriétés séparatives des équations de bilan sous forme de tableau (Tableau 5).

## References

- [1] A. Oberbeck, Über die wärmeleitung der flüssigkeiten bei berücksichtigung der strömungen infolge von temperatur differenzen, *Ann. Physik* 7 (1879) 271–292.
- [2] J. Boussinesq, Théorie analytique de la chaleur, Gautier Villard, vol. 2, 1903.
- [3] E.A. Spiegel, G. Veronis, On the Boussinesq approximation for a compressible fluid, *Astrophys. J.* 131 (1962) 442–447.
- [4] J.M. Mihaljan, A rigorous exposition of the Boussinesq approximations applicable to a thin layer of fluid, *Astrophys. J.* 136 (1962) 1126–1133.
- [5] B. Gebhart, in: *Heat Transfer*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1971, pp. 318–325.
- [6] J.N. Gence, J.P. Schon, J. Mathieu, Justification des approximations de Boussinesq pour la description d'une turbulence thermique et cinématique homogène, *J. de Mécanique* 17 (1978) 299–321.
- [7] J.A. Dutton, G.H. Fichtl, Approximate equations of motion for gases and liquids, *J. Atmos. Sci.* 26 (1969) 241–254.
- [8] P.C.T. De Boer, Thermally driven motion of strongly heated fluids, *Int. J. Heat Mass Transfer* 27 (12) (1984) 2239–2251.
- [9] C. Rey, A. Boudjemaa, Free convection grid turbulence, in: H.H. Fernholz, H.E. Fiedler (Eds.), *Advances in Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 204–209.
- [10] C. Rey, J.M. Rosant, Influence of density variations on small turbulent structures of temperature in strongly heated flow. In: G. Hestoni (Ed.), *Heat Transfer* 90, vol. 2, Hem. Pub. Corp., 1990, pp. 405–409.
- [11] T. Aurier, C. Rey, Second-order turbulence modelling and numerical simulation of volume variable turbulent flows, in: R. Moreau (Ed.), *Fluids Mechanics and its Applications*, IUTAM Symposium on Variable Density Low Speed Turbulent Flows, vol. 41, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1997, pp. 89–92.
- [12] M. Pavageau, Etude expérimentale de la turbulence de grille en convection naturelle — analyse des effets 'non-Boussinesq', Thèse de Doctorat, Ecole Doctorale SPI de Nantes no. ED82-38, Ecole Centrale de Nantes, 1994.
- [13] T. Aurier, Modélisation au second ordre et simulation numérique des écoulements turbulents à volume variable, Thèse de Doctorat, Ecole Doctorale SPI de Nantes no. ED82-122, Ecole Centrale de Nantes, 1995.
- [14] Th. Hesselberg, Die gesetze der ausgeglichenen atmosphärischen bewegungen Beitr., *Physik. Frein. Atmosphäre* 12 (1925) 141–160.
- [15] J. Van Mieghem, Thermodynamique atmosphérique, I. Théorie. Inst. Roy. 4, Météor. Belgique, Miscellanées, fasc. XII, 1943.
- [16] A. Favre, Equations statistiques des gaz turbulents, *C. R. Acad. Sci.* 246, 2573, 2723, 2839, 321 (1958).
- [17] A. Favre, Equations des gaz turbulents compressibles, *J. de Mécanique* 4 (1965) 361–390 et 391–421.
- [18] A. Favre, Equations statistiques aux fluctuations turbulentes d'entropie, de concentration, de rotationnel, dans les écoulements compressibles. *C. R. Acad. Sci. Paris, A* 273 (1971) 1087 et 1289.
- [19] A. Favre, Equations statistiques fondamentales des fluides turbulents compressibles, in: *C. R. du Vème Congrès Canadien de Mécanique Appliquée*, Univ. de New Brunswick, Fredericton, Canada, 1975.
- [20] A. Favre, L. Kovaszny, R. Dumas, J. Gaviglio, M. Coantic, *La turbulence en mécanique des fluides*, Gauthiers Villars, 1976.
- [21] E. Ruffin, R. Schiestel, F. Anselmet, M. Amielh, L. Fulachier, Investigation of characteristic scales in variable density turbulent jet using a second-order model, *Phys Fluids* 6 (8) (1994) 2785–2799.
- [22] M. Germano, Averaging procedure for the large eddy simulation of variable density flows, in: R. Moreau (Ed.), *Fluids Mechanics and its Applications*, IUTAM Symposium on Variable Density Low Speed Turbulent Flows, vol. 41, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1997, pp. 101–108.
- [23] P. Chassaing, Mélange turbulent de gaz inertes dans un jet de tube libre, Thèse de Doctorat d'Etat, Institut National Polytechnique de Toulouse, no. 42, 1979.
- [24] P. Chassaing, Une alternative à la formulation des équations du mouvement turbulent d'un fluide à masse volumique variable, *J. de Méca. Th. Appl.* 4 (3) (1985) 375–389.
- [25] Ha Minh, B.E. Launder, H. Mac Innes, A new approach to the analysis of turbulent mixing in variable density flows, *Turbulent Shear Flows* 3, Davis, 1981.
- [26] P. Chassaing, G. Harran, L. Joly, Density fluctuation correlations in free turbulent binary mixing, *J. Fluid Mech.* 64 (1994) 775.
- [27] P. Chassaing, S. Castaldi, G. Harran, L. Joly, Variable density mixing in kinematically homogeneous turbulence, in: 11ème Symp. on Turbulent Shear Flows, Grenoble, France, 1997.
- [28] S. Castaldi, Etude de la turbulence cinématiquement homogène isotrope et massivement inhomogène par simulation numérique directe, Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse no. d'ordre 01/02/99, 1999.
- [29] J. Way, P.A. Libby, Application to hot wire anemometry

- try and digital techniques to measurements in a turbulent helium jet, *AIAA Journal* 9 (8) (1971) 1567–1573.
- [30] R. Hermouche, *Analyse expérimentale dans les jets de mélange hélium–air*, Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, 1996.
- [31] E. Ruffin, Y. Mouilleau, J. Chaineaux, Large scale characterisation of the concentration field of supercritical jets of hydrogen and methane, in: R. Moreau (Ed.), *Fluids Mechanics and its Applications*, IUTAM Symposium on variable density low speed turbulent flows, vol. 41, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1997, pp. 257–264.